数理解析研究所講究録 1212 巻 2001 年 50-64

3次曲面のモジュライに関する保型形式

北海道大学大学院理学研究科　松本圭司 (Keiji Matsumoto)
Division of Mathematics, Graduate School of Science,
Hokkaido University

1 序

複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の非特異3次曲線は、種数1の compact 複素多様体で

$$C_\lambda : w^2 = z(z-1)(z-\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0,1\}$$

という標準形に変形できる。曲線 C_λ は複素射影直線 $\mathbb{P}$ 上の4点 $0, 1, \lambda, \infty$ で分岐する2重被覆とみなすこともできる。集合 $\mathbb{C} - \{0,1\}$ から λ_0 をとり固定し、$H_1(C_{\lambda_0}, \mathbb{Z})$ の基底 α_0, β_0 を交点数 $\alpha_0 \cdot \beta_0$ が -1 となるように定める。集合 $\mathbb{C} - \{0,1\}$ 内の一般の λ に対して λ_0 と λ とを $\mathbb{C} - \{0,1\}$ 内の path で結び、その path に沿った接続として $H_1(C_\lambda, \mathbb{Z})$ の基底 α, β を定める。$\mathbb{C} - \{0,1\}$ から $\mathbb{P}$ への多価写像

$$\varphi : \lambda \mapsto [\int_\alpha \frac{dz}{w}, \int_\beta \frac{dz}{w}]$$

は3次曲線族 $\{C_\lambda\}$ に関する周期写像と呼ばれ、像は上半空間 $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ でモノドロミー群は $SL_2(\mathbb{Z})$ のレベル2の主合同部分群

$$\Gamma(2) = \{g \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid g \equiv I_2 \bmod 2\}$$

となる。周期写像 φ の逆写像はモノドロミー群 $\Gamma(2)$ の作用で不変な一価正則関数となり、Jacobi の theta constants

$$\vartheta\binom{a}{b}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp[\pi\sqrt{-1}((n+a)^2\tau + 2(n+a)b)], \quad \tau \in \mathbb{H},\ a, b \in \mathbb{Q}$$

を用いて

$$\mathbb{H}/\Gamma(2) \ni \tau \mapsto \lambda = \frac{\vartheta^4\binom{0}{0}(\tau)}{\vartheta^4\binom{0}{1/2}(\tau)} \in \mathbb{C} - \{0,1\}$$

と表示される。集合 $\mathbb{C}-\{0,1\}$ を $\mathbb{P}$ 上の４点の配置空間 $X(2,4)$

$$GL_2(\mathbb{C})\backslash\{\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{14} \\ x_{21} & \dots & x_{24} \end{pmatrix} \mid \det\begin{pmatrix} x_{1i} & x_{1j} \\ x_{2i} & x_{2j} \end{pmatrix} \neq 0,\ 1 \leq i < j \leq 4\}/(\mathbb{C}^*)^4$$

とみなし、周期写像 φ を $X(2,4)$ からの写像と考える。配置空間 $X(2,4)$ は Grassmann 多様体 $G(2,4)$ のある開稠密部分集合を $(\mathbb{C}^*)^4$ で割った空間で、$G(2,4)$ の Plücker 座標 $D_{ij}(x)=\det\begin{pmatrix} x_{1i} & x_{1j} \\ x_{2i} & x_{2j} \end{pmatrix}$ を用いて

$$\iota : X(2,4) \ni x \mapsto [D_{12}(x)D_{34}(x), D_{13}(x)D_{24}(x), D_{14}(x)D_{23}(x)] \in \mathbb{P}^2$$

によって $\mathbb{P}^2$ に埋め込める。この埋め込みによる像は Plücker 関係式

$$D_{12}(x)D_{34}(x) - D_{13}(x)D_{24}(x) + D_{14}(x)D_{23}(x) = 0$$

より、

$$Y = \{[t_0, t_1, t_2] \in \mathbb{P}^2 \mid t_0 - t_1 + t_2 = 0,\ t_0t_1t_2 \neq 0\}$$

である。theta constants $\vartheta\binom{a}{b}(\tau)$ は Jacobi の恒等式

$$\vartheta^4\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}(\tau) - \vartheta^4\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(\tau) + \vartheta^4\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}(\tau) = 0$$

をみたすので、写像

$$\theta : \mathbb{H}/\Gamma(2) \ni \tau \mapsto [\vartheta^4\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}(\tau), \vartheta^4\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}(\tau), \vartheta^4\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}(\tau)] \in \mathbb{P}^2$$

の像は Y となり、以下の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc} X(2,4) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{H}/\Gamma(2) \\ & \iota\searrow & \downarrow\theta \\ & & Y. \end{array} \tag{1}$$

つまり、３つの theta constants の４乗を並べる写像 θ が周期写像 φ の逆写像を与えている。

射影平面内の非特異３次曲線を３次元射影空間内の非特異３次曲面にとりかえて類似の結果を得ようということはだれもが思いつくことである。し

かし、3次曲面が有理曲面であることから周期写像の構成ができなかったことでこの一般化に関する研究成果がほとんどあがっていなかった。最近 D. Allcock, J.A. Carlson and D. Toledo によって $\mathbb{P}^3$ の3次曲面 S で分岐する cyclic 3重被覆 X_S の Intermediate Jacobian $J(X_S)$ を考えることで S のモジュライ空間が4次元複素超球 $\mathbb{B}^4$ で一意化されることが示された（文献 [ACT] 参照）。その逆対応は $\mathbb{B}^4$ 上の保型形式を構成することにより得られるが、D. Allcock and E. Freitag により Borcherds products を用いて与えられているようである（文献 [AF] 参照）。

文献 [ACT] による3次曲面族に関する周期写像 Φ の構成は、主偏極をもつアーベル多様体である $J(X_S)$ の考察が鍵となっているので、周期写像の逆写像の構成は $J(X_S)$ 上の theta 関数を用いてなされることが自然である。寺杣友秀氏（東大・数理）との共同研究 [MT] により、3次曲面族に関する周期写像 Φ に関しても3次曲線のときに得られた可環図式 (1) と全く同様の図式が得られたことを以下で紹介する。

2 Intermediate Jacobian $J(X_S)$

$\mathbb{P}^3$ 内の非特異3次曲面を S とし、S で分岐する $\mathbb{P}^3$ の cyclic な3重被覆を X_S とする。X_S は $\mathbb{P}^4$ 内の3次超曲面として実現できる。$\mathbb{P}^4$ 内の一般の3次超曲面 X に対して、$H^{3,0}(X)=0$ となり、X の Intermediate Jacobian $J(X)=H^{2,1}(X)^*/H_3(X,\mathbb{Z})$ は5次元の主偏極をもつアーベル多様体であることが、文献 [CG] で示されている。また、その文献では $J(X)$ はある代数曲線の Jacobian の subvariety として構成できることも示されている。この Section ではその構成法を紹介し、S で分岐する $\mathbb{P}^3$ の cyclic な3重被覆という特殊な3次超曲面 X_S に対して具体的に $J(X_S)$ を与える。

3次超曲面 X に対して、X 内の点 p を通る X 内の直線は一般に6本あり、X に含まれる直線全体の集合 F は、Grassmann 多様体 $G(2,5)$ （$\mathbb{P}^4$ 内の直線全体の集合）の2次元 smooth variety となる。X 内の一般の直線 ℓ を一つとり固定する。直線 ℓ と交わる F の元全体 $C(\ell)$ は F の divisor となり種数は 11 となる。$C(\ell)$ には involution σ が以下のように定義される。$C(\ell)$ の元 m に対して ℓ と m で張られる $\mathbb{P}^4$ 内の平面と X との交わりでできる3次曲線を考える。この3次曲線には直線 ℓ, m が含まれているので3直線に分解している。involution σ を直線 m に対して2直線 ℓ, m 以外の第3の直線を対応させるものとする。involution σ は $H_1(C(\ell),\mathbb{Z})$ および $H^{1,0}(C(\ell))$ の位数2の線形変換を引き起こす。$H_1(C(\ell),\mathbb{Z})^-$ と $H^{1,0}(C(\ell))^-$ をそれぞれ σ の作用による $H_1(C(\ell),\mathbb{Z})$ と $H^{1,0}(C(\ell))$ の (-1)-固有空間とする。$H_1(C(\ell),\mathbb{Z})^-$ の階数は 10 で $H^{1,0}(C(\ell))^-$ の次元は5となる。

Fact 2.1 複素トーラス $(H^{1,0}(C(\ell))^-)^*/H_1(C(\ell),\mathbb{Z})^-$ は主偏極をもつ5次元アーベル多様体で X の *Intermediate Jacobian* $J(X)$ と同型となる。

$\mathbb{P}^3$ 内の非特異3次曲面 S 内には 27 本の直線がある。そのうちの1本を ℓ とする。27 本の直線のうち ℓ と交わるものが10本ある。それらを $m_1, m_1', \ldots, m_5, m_5'$ とし、ℓ, m_i, m_i' $(1 \le i \le 5)$ が同一平面内にあるものとする。3次超曲面 X_S に対して S 内にある上記の ℓ と交わる X_S 内の直線全体の集合 $C(\ell)$ を考える。ℓ 内の点 p を通る直線は一般には6本あるが、ℓ 自身は分岐している3次曲面 S に含まれているのでその寄与は3となる。ℓ の点 p を通る ℓ 以外の直線は3本あり、X_S の被覆変換群の作用で移り合うので、$C(\ell)$ は $\ell(\simeq \mathbb{P})$ の cyclic な3重被覆と考えられる。ℓ と直線 m_i, m_i' たちの交点 p_i, p_i' はこの被覆の分岐点となる。なぜなら p_i を通る ℓ 以外の直線として m_i があるが、やはり S に含まれているので寄与は3となるからである。p_i' が分岐点である理由も同様である。また、ℓ 内には点 $p(\in \ell)$ を通る X_S 内の6直線が ℓ のみで6重になる特別な2点 p_0, p_∞ が存在している。結局この被覆の分岐点は $p_0, p_\infty, p_1, p_1', \ldots, p_5, p_5'$ となっている。Riemann-Hurwitz の公式から $C(\ell)$ の種数は 10 である。また、前述の $C(\ell)$ 上に定まる involution σ は $C(\ell)$ の被覆変換群の作用と可換であり、$\sigma(m_i) = m_i'$ をみたす。直線 ℓ にも σ が作用し、固定点は p_0 と p_∞ の2点のみである。$\ell(\simeq \mathbb{P}^1)$ に p_0, p_∞ が $0, \infty$ となるように座標 z を入れると ℓ 上の involution σ_ℓ は $\sigma_\ell : z \mapsto -z$ で表される。点 $p_1, p_1', \ldots, p_5, p_5'$ が $z = a_1, -a_1, \ldots, a_5, -a_5$ で表示されるとすると、曲線 $C(\ell)$ は代数曲線

$$C_S : w^3 = z \prod_{i=1}^{5} (z^2 - a_i^2)$$

とみなすことができる。この代数曲線上では、被覆変換群の生成元である位数3の自己同型 ρ と involution σ はそれぞれ

$$\rho \cdot (z, w) = (z, \omega w), \quad \sigma \cdot (z, w) = (-z, -w)$$

となっている。ここで $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とする。また、ℓ/σ_ℓ も $\mathbb{P}^1$ なので $C(\ell)$ は $\mathbb{P}^1$ の cyclic な6重被覆とも考えられる。つまり

$$C_S' : \ w^6 = z \prod_{i=1}^{5} (z - a_i^2)^2$$

とみなすこともできる。この代数曲線上での ρ と σ の作用は

$$\rho \cdot (z, w) = (z, \omega w), \quad \sigma \cdot (z, w) = (z, -w)$$

となっている。

Proposition 2.1 *involution* σ の作用で -1 倍される C_S 上の $(1,0)$-*forms* の空間 $H^{1,0}(C_S)^-$ の基底は

$$\varphi_1 = \frac{zdz}{w}, \quad \varphi_j = \frac{z^{2(j-2)}dz}{w^2} \ (2 \leq j \leq 5)$$

で与えられ

$$\rho(\varphi_1) = \omega^2\varphi_1, \quad \rho(\varphi_j) = \omega\varphi_j \ (2 \leq j \leq 5)$$

をみたす。*involution* σ の作用で -1 倍される C_S 上の *cycles* の空間 $H_1(C_S, \mathbb{Z})^-$ は *rank* 10 で、以下をみたす基底 $(A, B) = (A_1, \ldots, A_5, B_1, \ldots, B_5)$ がとれる。

$$A_i \cdot A_j = B_i \cdot B_j = 0, \quad A_i \cdot B_j = -2\delta_{ij}$$

$${}^t(\rho(A), \rho(B)) = \begin{pmatrix} -I_5 & -H \\ H & O \end{pmatrix} {}^t(A, B), \quad H = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, -1).$$

ここで、C_S の自己同型 ρ により定まる $H^{1,0}(C_S)^-$, $H_1(C_S, \mathbb{Z})^-$ 上の変換たちも同じ記号 ρ で表している。

Remark 2.1 曲線 C_S 上の正則 *1-form* φ_1 は 曲線 C'_S 上では dz/w と表示される。

Fact 2.1 の結果と合わせて以下の定理を得る。

Proposition 2.2 $J_\sigma^-(C_S) = (H^{1,0}(C_S)^-)^*/H_1(C_S, \mathbb{Z})^-$ は主偏極をもつアーベル多様体で X_S の *Intermediate Jacobian* $J(X_S)$ と同型となる。

$H^{1,0}(C_S)^-$ の基底 $\psi_1, \ldots, \psi_5$ を $\int_{B_j} \psi_i = \delta_{ij}$ をみたす正規化されたものとする。行列 $\tau = (\int_{A_j} \psi_i)_{1 \leq i,j \leq 5}$ を $J_\sigma^-(C_S)$ の周期行列とよぶ。$J_\sigma^-(C_S)$ は $\mathbb{C}^5$ を $\mathbb{Z}^5$ と τ の行ベクトルたちで張られる格子 Λ_τ で割った複素トーラスとみなせる。また、τ は主偏極をもつアーベル多様体の周期行列なので、対称行列で虚部が正定値となっている。Proposition 2.1 内の ρ の作用に注目して、周期行列の具体形を与えることができる。

Proposition 2.3 3 次曲面 S に対して得られる $J_\sigma^-(C_S)$ の周期行列 τ は

$$\tau = \omega^2[H - (1 - \omega^2)(Hy\,{}^tyH)/({}^tyHy)]$$

と表示できる。ここで

$$y = {}^t(y_1, \ldots, y_5) = {}^t\Big(\int_{A_1} \varphi_1, \ldots, \int_{A_5} \varphi_1\Big)$$

で、$y^*Hy < 0$ をみたしている。

3　射影平面内の６点の配置空間

$\mathbb{P}^3$ 内の非特異３次曲面 S は射影平面 $\mathbb{P}^2$ を６点 $P_1,\dots,P_6$ で blow up することにより得られる。これらの６点 $P_1,\dots,P_6$ に対しては、これらのうちの３点を通る直線もすべての６点を通る２次曲線も存在しない。Section 2 で考察した曲線 $C(\ell)$ の幾何学的な性質がこの blow up を介して射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上ではどうなっているかを調べる。

３次曲面 S 内の 27 本の直線は以下のように $\mathbb{P}^2$ の点、直線、２次曲線と対応している。

- P_i の blow up により生じる例外曲線 ℓ_i, 計６本.
- P_i と P_j を結ぶ直線 L_{ij} の引き戻し ℓ_{ij}, 計１５本.
- P_i 以外の５点を通る２次曲線の Q_i の引き戻し $\check{\ell}_i$ 計６本.

いずれも自己交点数は -1 である。Section 2 で固定した直線 ℓ を $\check{\ell}_6$ とする。射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上では P_6 以外の５点 $P_1,\dots,P_5$ を通る２次曲線 Q_6 が対応している。$\check{\ell}_6$ と交わる１０直線は $\ell_1,\ell_{16},\ell_2,\ell_{26},\dots,\ell_5,\ell_{56}$ で $\check{\ell}_6,\ell_i,\ell_{i6}$ が同一平面内にある。したがって $C(\ell)$ 上の involution σ で $\sigma(\ell_i)=\ell_{i6}$ となっている。$\check{\ell}_6$ と $\ell_i(=m_i)$ との交点 p_i は $\mathbb{P}^2$ 上では P_i が対応している。また、$\check{\ell}_6$ と $\ell_{i6}(=m_i')$ との交点 p_i' は $\mathbb{P}^2$ 上では２次曲線 Q_6 と直線 L_{i6} との P_i でない方の交点が対応している。この状況より $\check{\ell}_6(=\ell)$ 上の involution σ_ℓ は、$P\in Q_6$ に対して P と P_6 とを結ぶ直線と Q_6 との P 以外の交点を対応させるという２次曲線 Q_6 上の involution と対応している。点 P_6 から２次曲線 Q_6 へ２本の接線 L_0,L_∞ が引ける。その２つの接点 P_0,P_∞ はこの involution の固定点となる。従って p_0,p_∞ は P_0,P_∞ と対応している。

以下のように座標を選ぶとこの状況がより具体的になる。３点 P_0,P_6,P_∞ が ${}^t(1,0,0)$, ${}^t(0,1,0)$, ${}^t(0,0,1)$ となり、２次曲線 Q_6 が $t_1^2=t_0t_2$ となるように $\mathbb{P}^2$ の座標 $t={}^t(t_0,t_1,t_2)$ を選ぶ。直線 L_0,L_∞ は $t_2=0, t_0=0$ となる。写像

$$ver:\mathbb{P}^1\ni {}^t(t_0,t_1)\mapsto {}^t(t_0^2,t_0t_1,t_1^2)\in\mathbb{P}^2$$

は $\mathbb{P}^1$ と Q_6 との同型を与える。直線 $\check{\ell}_6(=\ell)$ の上の点 $p_0,p_\infty,p_1,p_1'\dots,p_5,p_5'$ は座標 $z=t_1/t_0$ により $z=0,\infty,a_1,-a_1,\dots,a_5,-a_5$ に対応していたが、

$$ver(0)={}^t(1,0,0)=P_0,\quad ver(\infty)={}^t(0,0,1)=P_\infty,$$

となっていて、２次曲線 Q_6 上の点 P_i,P_i' $(1\le i\le 5)$ の座標は

$$ver(a_i)={}^t(1,a_i,a_i^2),\quad ver(-a_i)={}^t(1,-a_i,a_i^2)$$

で与えられる。直線 L_{i6} は $a_i^2 t_0 = t_2$ であり、点 P_i' を含んでいることや Q_6 上の involution は $(t_0, t_1, t_2) \mapsto (t_0, -t_1, t_2)$ で表示されることが容易にわかる。

射影平面内の 6 点の配置空間 $X(3,6)$ を

$$GL_3(\mathbb{C})\backslash\{x \in M(3,6) \mid Q(x) \neq 0,\ D_{ijk}(x) \neq 0\ (1 \leq i < j < k \leq 6)\}/(\mathbb{C}^*)^6$$

で定める。ここで $D_{ijk}(x)$ は x の第 i, j, k 列からできる小行列式で

$$Q(x) = \det \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 & \cdots & x_{16}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 & \cdots & x_{26}^2 \\ x_{31}^2 & x_{32}^2 & \cdots & x_{36}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{12}x_{22} & \cdots & x_{16}x_{26} \\ x_{21}x_{31} & x_{22}x_{32} & \cdots & x_{26}x_{36} \\ x_{31}x_{11} & x_{32}x_{12} & \cdots & x_{36}x_{16} \end{pmatrix}$$

とする。3×6 行列 x の列ベクトルを射影座標とみなし、射影変換 $GL_3(\mathbb{C})$ の作用で移り合うものは同じものとみなしている。$D_{ijk}(x) = 0$ は x の 第 i, j, k 列ベクトルで表される 3 点が一直線上にあることを意味し、$Q(x) = 0$ は x の列ベクトルで表される 6 点がある 2 次曲線上にあることを意味する。

配置空間 $X(3,6)$ には 6 次対称群 S_6 が列ベクトルの置換として作用していることはすぐにわかるが、実はさらに大きい E_6 型の Weyl 群 $W(E_6)$ が作用している。3 点 P_1, P_2, P_3 に関して 2 次変換 r_{123} を行うと直線 L_{23}, L_{31}, L_{12} が一点になるので、

$$r_{123}(L_{23}),\ r_{123}(L_{31}),\ r_{123}(L_{12}),\ r_{123}(P_4),\ r_{123}(P_5),\ r_{123}(P_6)$$

で新しい 6 点の配置が得られる。6 次対称群 S_6 の作用と r_{123} の作用で生成される $X(3,6)$ の変換群は $W(E_6)$ となっている。

配置空間 $X(3,6)$ の固定された元 x に対して $\mathbb{P}^2$ を x に対応している 6 点で blow up して 3 次曲面 S が得られる。2 次曲線 Q_6 に対応している S 内の直線 $\check{\ell}_6$ を ℓ として選び曲線 $C(\ell)$ を構成する。そしてアーベル多様体 $J_\sigma^-(C(S))$ の周期行列 τ およびそれの具体型を与える列ベクトル y が得られる。この x から y への対応を $X(3,6)$ 全体に接続することで周期写像

$$\Phi : X(3,6) \to \mathbb{B}^4 = \{y \in \mathbb{P}^4 \mid y^* H y < 0\}$$

が定義される。接続の仕方により像が変わり得るので Φ は多価写像である。また、最初に定めた x から y への対応に関しては ℓ の選び方と $C(\ell)$ の $H_1(C(\ell), \mathbb{Z})^-$ の基底の定め方に自由度がある。この自由度が $W(E_6)$ の作用と対応している。[ACT] の結果より、以下の命題を得る。

Proposition 3.1 周期写像 Φ の像は $\mathbb{B}^4$ 内で稠密な開集合である。周期写像 Φ のモノドロミー群は

$$\Gamma(1-\omega)=\{g\in GL_5(\mathbb{Z}[\omega])\mid g^*Hg=H,\ g\equiv I_5 \bmod (1-\omega)\}$$

である。また、$\Gamma/\langle\Gamma(1-\omega),-I_5\rangle$ は E_6 型の *Weyl* 群 $W(E_6)$ と同型となる。ここで $\Gamma=\{g\in GL_5(\mathbb{Z}[\omega])\mid g^*Hg=H\}$ とする。

主目的は周期写像 Φ の逆写像を具体的に構成することであるが、そのためには配置空間 $X(3,6)$ をよく知っておく必要がある。商空間として定義された $X(3,6)$ を理解する一つの手段はよい代表元を設定することである。それは $\mathbb{P}^2$ 内の 6 点 P_i たちの座標を具体的に指定することであり、もう既に

$$P_6={}^t(0,1,0),\quad P_i={}^t(1,a_i,a_i^2)\ (1\le i\le 5)$$

としていてほとんど実行されている。つまり (3×6) 行列

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0\\a_1&a_2&a_3&a_4&a_5&1\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&a_4^2&a_5^2&0\end{pmatrix}\tag{2}$$

で $\mathbb{P}^2$ の 6 点を表示するわけである。しかし、まだ少し座標の取り方に自由度が残っている。そこで $a_5=1$ とおきばその自由度が消えて $(a_1,\dots,a_4)$ が $X(3,6)$ の代表元となるように思えるが、

$$(a_1,\dots,a_4),\quad(-a_1,\dots,-a_4),\quad(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_4}),\quad(\frac{-1}{a_1},\dots,\frac{-1}{a_4})$$

が同じ 6 点の配置を与えてしまうので、これでは $X(3,6)$ の代表とはなっていない。変換

$$(a_1,\dots,a_4)\mapsto(-a_1,\dots,-a_4),\quad(a_1,\dots,a_4)\mapsto(\frac{1}{a_1},\dots,\frac{1}{a_4})$$

は involution σ, P_0 と P_∞ の入れ換えとそれぞれ対応していることに注意する。そこで $GL_2(\mathbb{C})$ と $(\mathbb{C}^*)^6$ の作用で

$$\begin{pmatrix}1&u_{11}&u_{12}&1&0&0\\1&u_{21}&u_{22}&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{pmatrix},\tag{3}$$

の形まで変形する。この行列は $X(3,6)$ の代表元であり、u_{ij} は $X(3,6)$ の座標とみなせる。u_{ij} を a_i を用いて表示すると

$$u_{11}=\frac{(a_5+a_2)(a_4-a_1)}{(a_4-a_2)(a_5+a_1)},\qquad u_{12}=\frac{(a_5+a_3)(a_4-a_1)}{(a_4-a_3)(a_5+a_1)},$$
$$u_{21}=\frac{(a_4+a_2)(a_5-a_1)}{(a_5-a_2)(a_4+a_1)},\qquad u_{22}=\frac{(a_4+a_3)(a_5-a_1)}{(a_5-a_3)(a_4+a_1)}.$$

となっている。

この手段により $X(3,6)$ に座標の導入もなされたのだが、一方で $W(E_6)$ の作用がとても複雑になってしまっている。$W(E_6)$ の作用がよくわかる $X(3,6)$ の射影空間へ埋め込む手段が [C], [Yo3] で与えられている。その結果を周期写像 Φ の挙動と合うように整理した形で紹介する。(3×6) 行列 x および $\{i,j,k,l,m,n\}=\{1,2,3,4,5\}$, $i<j<k$, $l<m$ に対して１８次多項式たちを

$$\begin{aligned}
Z_{v_i+v_j+v_k} &= (-1)^{i+j+k}D_{ijk}(x)D_{lm6}(x)Q(x)\\
Z_{-v_i-v_j-v_k} &= -Z_{v_i+v_j+v_k}\\
Z_{v_k+v_l-v_m} &= D_{ikl}(x)D_{jkl}(x)D_{km6}(x)D_{lm6}(x)D_{mij}(x)D_{6ij}(x)\\
Z_{-v_k-v_l+v_m} &= -Z_{v_k+v_l-v_m}
\end{aligned}$$

で定める。ここで $v_1,\dots,v_5$ は独立なベクトルと考える。これらは全部で $\binom{5}{3}\times 2^3=80$ 個ある。(3×6) 行列 x が (2) で与えられているとき、

$$\begin{aligned}
Z_{v_1+v_2+v_3} &= -[(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)(a_5-a_4)(a_5+a_4)]\Delta(a),\\
Z_{v_1+v_2-v_3} &= -[(a_2-a_1)(a_5-a_4)(a_5+a_4)(a_3+a_2)(a_3+a_1)]\Delta(a),\\
\frac{Z_{v_1+v_2+v_3}}{Z_{v_1+v_2-v_3}} &= \frac{(a_3-a_2)(a_3-a_1)}{(a_3+a_2)(a_3+a_1)} \qquad (4)
\end{aligned}$$

となっている。ここで $\Delta(a)$ は a_i たちの差積である。

Fact 3.1 写像

$$\iota : X(3,6)\ni x\mapsto [\dots,Z_{\pm v_i\pm v_j\pm v_k},\dots]\in\mathbb{P}^{79}$$

は埋め込みである。その像は $Z_{-v}=-Z_v$ と以下の線形関係式、３次関係式を $W(E_6)$ の作用で移した式たちで決定される。

$$Z_{v_1+v_2+v_4}-Z_{v_1+v_4+v_5}+Z_{v_2+v_3+v_5}-Z_{v_1+v_3+v_4}=0,$$

$$Z_{v_1+v_2+v_4}Z_{v_2+v_3-v_4}Z_{v_1-v_2+v_3}=-Z_{v_1+v_4+v_5}Z_{v_1+v_3-v_5}Z_{v_3-v_4+v_5}.$$

Remark 3.1 *Remark 2.1* より y_i たちは曲線 C'_S の正則 1-*form* $\frac{dz}{w}$ の積分とみなせるので、y_j たちがみたす微分方程式は $a_1^2,\dots,a_4^2$ が独立変数でパラメーターが $\frac{1}{6}(1,1,2,2,2,2,2)$ の 4 変数超幾何微分方程式 *Lauricella* F_D である。超幾何微分方程式 F_D の独立な解を並べることにより得られる $\mathbb{C}^n$ の稠密開集合から $\mathbb{P}^n$ への多価写像 f の像が複素超球 $\mathbb{B}^n$ になるようなパラメーターたちがリストアップされている。多価写像 f の逆写像が一価となる条件をつけてリストアップしている *[DM], [T]* には上記のパラメーターは現れないが、その条件をつけていない *[Mo]* 内には登場している。つまり $a_1^2,\dots,a_4^2$ を表示しようとすると一価写像は得られないわけだが、これらは配置空間 $X(3,6)$ の座標系とはなっていない。周期写像 Φ の定義域は配置空間 $X(3,6)$ であるので、逆写像 Φ^{-1} は一価である。

4 周期写像の逆写像の構成

Proposition 2.3 により $\mathbb{B}^4$ の元 y と $J_\sigma^-(C_S)$ の周期行列 τ との対応が明確になっているので、周期写像 $\Phi : X(3,6) \to \mathbb{B}^4$ の逆写像の具体的な表示を得るには周期行列 τ から曲線 C_S の分岐点の情報をいかに回復するかが問題となる。その情報を得るには分岐点たちが極や零点となる C_S 上の有理型関数をたくさん構成すればよい。主偏極をもつアーベル多様体 $J_\sigma^-(C_S)$ 上では theta 関数を用いて有理型関数がある程度得られるので、C_S から $J_\sigma^-(C_S)$ への正則写像を与え、それらを曲線 C_S に引き戻すことにより目的とする有理型関数を構成する。

曲線 C_S から $\mathbb{C}^5$ への多価正則写像

$$\jmath : C_S \ni p \mapsto \int_{\sigma(p)}^{p} \psi = (\int_{\sigma(p)}^{p} \psi_1, \dots, \int_{\sigma(p)}^{p} \psi_5) \in \mathbb{C}^5$$

を考える。ここで $\psi = (\psi_1,\dots,\psi_5)$ は $H^{1,0}(C_S)^-$ の正規化された基底で、$\sigma(p)$ から p への積分路は p_0 から p への積分路 γ と $-\sigma(\gamma)$ とをつないだものとする。点 p が C_S 内の閉曲線 γ に沿って動いたとすると、$\jmath(p)$ には $\int_{\gamma-\sigma(\gamma)} \psi$ が加わる。$\sigma(\gamma-\sigma(\gamma)) = -(\gamma-\sigma(\gamma))$ なので $\gamma-\sigma(\gamma)$ は $H_1(C_S,\mathbb{Z})^-$ の元となる。したがって $\int_{\gamma-\sigma(\gamma)} \psi$ は格子 Λ_τ に属する。ゆえに、写像 $\jmath$ により一価正則写像 $\jmath : C_S \to \mathbb{C}^5/\Lambda_\tau (\simeq J_\sigma^-(C_S))$ が得られる。曲線 C_S の分岐点 p_0, p_∞ たちの $\jmath$ による像は格子 Λ_τ に含まれ p_i, p'_i $(1 \le i \le 5)$ の像 v_i, v'_i は $\mathbb{C}^5/\Lambda_\tau$ の 0 でない 3 等分点であり、$v'_i = -v_i$ および $v_1,\dots,v_5$ が独立となる

ことは容易にわかる。$v_1,\dots,v_5$ で張られる $\mathbb{C}^5/\Lambda_\tau$ の部分集合

$$V=\{v=\sum_{i=1}^{5}c_iv_i \mid c_i\in\{0,\pm1\}\}$$

の元 v に対して $|v|=\sum_{i=1}^{5}|c_i|$ とする。

theta 関数

$$\vartheta(z,\Omega)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^r}\exp[\pi\sqrt{-1}(\,{}^tn\Omega n+2\,{}^tnz)]$$

は $\mathbb{C}^r$ と r 次ジーゲル上半空間 $\mathbb{S}^r=\{\Omega\in GL_r(\mathbb{C}) \mid {}^t\Omega=\Omega,\quad \mathrm{Im}(\Omega)>0\}$ との直積 $\mathbb{C}^r\times\mathbb{S}^r$ 上の正則関数で $v\in\mathbb{Z}^r$ に対して

$$\vartheta(z+v,\Omega)=\vartheta(z,\Omega),\ \vartheta(z+\Omega v,\Omega)=\exp[-\pi\sqrt{-1}(\,{}^tv\Omega v-2\,{}^tvz)]\vartheta(z,\Omega)$$

をみたす。$a,b\in\mathbb{Q}^r$ に対して characteristic 付きの theta 関数 $\vartheta\binom{a}{b}(z,\Omega)$ を

$$\vartheta\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}(z,\Omega)=\exp[\pi\sqrt{-1}(\,{}^ta\Omega a+2\,{}^ta(z+b))]\vartheta(z+\Omega a+b,\Omega)$$

で定める。

Ω を $J^-_\sigma(C_S)$ の周期行列 τ として固定し、$\mathbf{1/2}=(I_5+\tau)\,{}^t(1/2,\dots,1/2)\in\mathbb{C}^5$ とおく。$\mathbb{C}^5$ 内の固定点 u に対して、関数 $\vartheta(\frac{1}{2}+u+z,\tau)$ を正則写像 $\jmath$ で引き戻して得られる関数 C_S 上の関数を $\Theta_u(p)$ とする、すなわち

$$\Theta_u(p)=\vartheta(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+u+\jmath(p),\tau)=\vartheta(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+u+\int_{\sigma(p)}^{p}\psi,\tau)$$

とする。$\Theta_u(p)$ は C_S 上の多価正則関数となるが、多価性は exp factor がかかるだけなので零点およびその位数が定義できる。偏角の原理と留数定理を用いて以下を示すことができる。

Proposition 4.1 関数 $\Theta_u(p)$ が恒等的に 0 でないならば $\Theta_u(p)$ は重複をこめて１０個の零点をもつ。また、その零点たちを $q_1,\dots,q_{10}$ とすると

$$u-\sum_{i=1}^{10}\jmath(q_i)\in\Lambda_\tau$$

をみたす。

Proposition 4.2 $u \in V$ に対しては関数 $\Theta_u(p)$ の $p_0, p_\infty, p_1, p_1', \dots, p_5, p_5'$ における零点の位数は $|u + \jmath(p)|$ と 3 を法として合同となる。特に

$$\vartheta(\frac{1}{2}, \tau) = 0, \quad \vartheta(\frac{1}{2} + c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k, \tau) \neq 0 \ (i < j < k,\ c_i c_j c_k \neq 0)$$

となる。

$v = c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k$ $(i < j < k,\ c_i c_j c_k \neq 0)$ に対して $\mathbb{C}^5/\Lambda_\tau$ の元 $\frac{1}{2} + c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k$ と対応している theta characteristic を a, b とし、$\vartheta_v(\tau) = \vartheta\binom{a}{b}(0, \tau)$ とおく。これらの $\vartheta_v(\tau)$ たちは全部で８０個ある。８０個の $\vartheta_v(\tau)$ を対応 (2.3) により $\mathbb{B}^4$ 上の関数とみなしたものを $\vartheta_v(y)$ で表す。

Proposition 4.3 関数 $\vartheta_v^3(y)$ は $\Gamma(1-\omega)$ に関する保型形式である。

Proposition 4.2 において $u = v_2 + v_3$ と $u = v_2 - v_3$ とすると $\Theta_u(p)$ の零点の位数は以下のようになる。

$u = v_2 + v_3$	point	p_0	p_∞	p_1	p_1'	p_2	p_2'	p_3	p_3'	p_4	p_4'	p_5	p_5'
	order	2	2	0	0	2	1	2	1	0	0	0	0

$u = v_2 - v_3$	point	p_0	p_∞	p_1	p_1'	p_2	p_2'	p_3	p_3'	p_4	p_4'	p_5	p_5'
	order	2	2	0	0	2	1	1	2	0	0	0	0

零点の個数は重複を込めて１０なので $\Theta_u(p)$ はその他の点では０とならない。

$v_i = \jmath(p_i)$ を $\mathbb{C}^5$ の元とみなすと p_0 と p_i を結ぶ path γ_i の取り方により値が変わる。path を固定して、この点に対する被覆変換群の作用 $\rho(v_i)$ を path $\rho(\gamma_i)$ による p_i の $\jmath$ の像として定める。$\rho(v_i)$ は $\mathbb{C}^5/\Lambda_\tau$ の元としては v_i と同じである。theta 関数の準周期性より C_S 上の関数

$$F(p) = \prod_{i=0}^{2} \frac{\vartheta(\frac{1}{2} + \rho^i(v_2 + v_3) + \jmath(p), \tau)}{\vartheta(\frac{1}{2} + \rho^i(v_2 - v_3) + \jmath(p), \tau)} \tag{5}$$

は一価有理型関数となる。上記の零点の情報より $F(p)$ は p_3 のみを３位の零点とし、p_3' のみを３位の極としている。C_S の座標 (z, w) を用いると

$$F(z, w) = c\frac{z - a_3}{z + a_3} \tag{6}$$

で表される。ここで c は (z, w) によらない定数である。有理型関数 F に $p = p_2'$ を代入すると (6) より、$c(-a_2 - a_3)/(-a_2 + a_3)$ である。一方、その値は (5) の右辺から具体的に値を求めることができる。これらの結果を合わ

せて定数 c の値が決定できる。有理型関数 F に $p=p_1$ を代入すると (6) より、$c(a_1-a_3)/(a_1+a_3)$ である。一方その値は (5) の右辺から

$$\frac{\vartheta^3_{v_1+v_2+v_3}(\tau)}{\vartheta^3_{v_1+v_2-v_3}(\tau)}$$

にある exp factor がかけられたものである。この exp factor は定数 c を決定する際にも現れていて、先に決まった c の値を代入するとキャンセルされる。(4) より

$$\frac{\vartheta^3_{v_1+v_2+v_3}(\tau)}{\vartheta^3_{v_1+v_2-v_3}(\tau)}=\frac{(a_3-a_2)(a_3-a_1)}{(a_3+a_2)(a_3+a_1)}=\frac{Z_{v_1+v_2+v_3}}{Z_{v_1+v_2-v_3}}$$

が得られる。この結果に $W(E_6)$ を作用させることにより、以下の定理が得られる。

Theorem 4.1 写像

$$\theta:\mathbb{B}^4/\Gamma(1-\omega)\ni y\mapsto[\ldots,\vartheta^3_v(y),\ldots]\in\mathbb{P}^{79}$$

の像は Z であり、以下の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc} X(3,6) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{B}^4/\Gamma(1-\omega) \\ & \iota\searrow & \downarrow\theta \\ & & Z. \end{array}$$

写像 ι が埋め込みなので、８０個の *theta constants* の３乗を並べる写像 θ が周期写像 Φ の逆写像を与えている。そして関数 $\vartheta_v(y)$ たちは多項式 Z_v たちがみたす関係式とまったく同じものをみたす。

Corollary 4.1 配置空間 $X(3,6)$ に *(3)* で導入した座標関数 u_{ij} は以下のように表示される。

$$\begin{aligned}
u_{11}&=\frac{\vartheta^3_{v_1-v_2+v_4}(y)(\vartheta^3_{-v_1+v_2+v_5}(y)-\vartheta^3_{v_1+v_2+v_5}(y))}{\vartheta^3_{-v_1+v_2+v_5}(y)(\vartheta^3_{v_1-v_2+v_4}(y)-\vartheta^3_{v_1+v_2-v_4}(y))},\\
u_{12}&=\frac{\vartheta^3_{v_1-v_3+v_4}(y)(\vartheta^3_{-v_1+v_3+v_5}(y)-\vartheta^3_{v_1+v_3+v_5}(y))}{\vartheta^3_{-v_1+v_3+v_5}(y)(\vartheta^3_{v_1-v_3+v_4}(y)-\vartheta^3_{v_1+v_3-v_4}(y))},\\
u_{21}&=\frac{\vartheta^3_{v_1-v_2+v_5}(y)(\vartheta^3_{-v_1+v_2+v_4}(y)-\vartheta^3_{v_1+v_2+v_4}(y))}{\vartheta^3_{-v_1+v_2+v_4}(y)(\vartheta^3_{v_1-v_2+v_5}(y)-\vartheta^3_{v_1+v_2-v_5}(y))},\\
u_{22}&=\frac{\vartheta^3_{v_1-v_3+v_5}(y)(\vartheta^3_{-v_1+v_3+v_4}(y)-\vartheta^3_{v_1+v_3+v_4}(y))}{\vartheta^3_{-v_1+v_3+v_4}(y)(\vartheta^3_{v_1-v_3+v_5}(y)-\vartheta^3_{v_1+v_3-v_5}(y))},
\end{aligned}$$

References

[ACT] D. Allcock, J.A. Carlson and D. Toledo, A complex hyperbolic structure for moduli of cubic surfaces, *A.R. Acad. Sci.* **326** (1998), 49–54.

[AF] D. Allcock and E. Freitag, Cubic Surfaces and Borcherds Products, preprint (math.AG/0002066).

[CG] C.H. Clemens, C.H. and P.A. Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, *Ann. Math.* **95** (1969), 460–541.

[C] A. Coble, Points sets and allied Cremona transformations I,II and III, *Trans. AMS* **16** (1915), 155–198, **17** (1916), 345–385 and **18** (1917), 331–372.

[DM] P. Deligne and G.D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and nonlattice integral monodromy, *I.H.E.S. Publ. Math.* **63** (1986), 5–89.

[DO] I. Dolgachev and D. Ortland, Point sets in projective spaces and theta functions, *Asterisque.* **165** (1988).

[H] B. Hunt, *The Geometry of some special Arithmetic Quotients, LNM.* **1637**, Springer, 1996.

[I] J. Igusa, *Theta Functions,* Springer, 1972.

[N] I. Naruki, Cross ratio variety as a moduli space of cubic surfaces, *Proc. London Math. Soc.* **45 no. 3** (1982), 1–30.

[MT] K. Matsumoto and T. Terasoma, Theta constants associated to cubic three folds, preprint (math.AG/0008024).

[Ma] K. Matsumoto, Theta constants associated with the cyclic triple coverings of the complex projective line branching at six points, preprint (math.AG/0008025).

[Mo] G.D. Mostow, Generalized Picard lattices arising from half-integral conditions, *I.H.E.S. Publ. Math.* **63** (1986), 91–106.

[Mu] D. Mumford, Prym varieties I, *Contributions to analysis* (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), 325–350, Academic Press, New York, 1974.

[Pic] E. Picard, Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires, *Acta Math.* **2** (1883), 114–126.

[Shi] H. Shiga, On the representation of Picard modular function by θ constants I-II, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **24** (1988), 311–360.

[T] T. Terada, Fonctions hypergéometriques F_1 et fonctions automorphes I, II, *Math. Soc. Japan* **35** (1983), 451–475; **37** (1985), 173–185.

[Yo1] M. Yoshida, *Hypergeometric Functions, My Love*, Vieweg, 1997.

[Yo2] M. Yoshida, The real loci of the configuration space of six points on the projective line and a Picard modular 3-fold, *Kumamoto J. Math.* **11** (1998), 43–67.

[Yo3] M. Yoshida, A $W(E_6)$-equivariant projective embedding of the moduli space of cubic surfaces, Kyushu University Preprint series in Mathematics 1999-26.